

STUDI KASUS: ANALISIS KRITERIA KONVERGENSI ITERASI SEDERHANA BERDASARKAN TEBAKAN AWAL

Puji Nurfauziah¹, Ika Wahyu Anita²

^{1,2} IKIP Siliwangi, Jl. Terusan Jenderal Sudirman, Cimahi, Indonesia
¹ puji_fauziahahmad@ikipsiliwangi.ac.id, ² ikawahyu@ikipsiliwangi.ac.id

ARTICLE INFO

Article History

Received Dec 24, 2022
Revised Jan 4, 2023
Accepted Nov 10, 2023

Keywords:

Convergence criteria;
Simple iteration;
Initial Guess

ABSTRACT

The simple iteration material in the numerical methods course is material related to functions and derivatives. Apart from this, simple iteration material requires one or two initial guesses that do not require bracketing the roots. This method will produce a root approximation as a solution, which will show convergent or divergent results. The convergence criteria are influenced by the derived results and the initial guesses provided. Because of this, this research aims to analyze the results of student answers to prove the convergence criteria of a given simple iterative problem. The method used in this research is a case study, analyzing the results of the answers of five randomly selected students studying numerical methods courses. Based on the results of the analysis of the convergence criteria based on initial guesses, it was concluded that only 5 students could prove the convergence criteria correctly. In general, students made mistakes in deriving algebraic functions, carried out division operations, and incorrectly determined the convergence criteria because they only proved the possibility of the function. given so that students only focus on convergence criteria without carrying out iterative analysis.

Corresponding Author:

Puji Nurfauziah,
IKIP Siliwangi
Cimahi, Indonesia
puji_fauziahahmad@ikipsiliwangi.ac.id

Materi iterasi sederhana pada mata kuliah metode numerik merupakan materi yang terkait dengan fungsi dan turunan. Selain hal tersebut, pada materi iterasi sederhana dibutuhkan satu atau dua buah tebakan awal yang tidak perlu mengurung akar. Metode ini akan menghasilkan hampiran akar sebagai solusi yang akan menunjukkan pada hasil yang konvergen atau divergen. Kriteria konvergensi dipengaruhi oleh hasil turunan dan tebakan awal yang diberikan. Oleh karena hal tersebut, penelitian ini bertujuan untuk menganalisis hasil jawaban mahasiswa untuk membuktikan kriteria konvergensi dari sebuah masalah iterasi sederhana yang diberikan. Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi kasus, dengan menganalisis hasil jawaban mahasiswa yang dipilih secara acak sebanyak lima mahasiswa yang mempelajari mata kuliah metode numerik. Berdasarkan hasil analisis kriteria konvergensi berdasarkan tebakan awal, diperoleh kesimpulan bahwa hanya 5 mahasiswa dapat membuktikan kriteria konvergensi dengan tepat, pada umumnya mahasiswa keliru dalam menurunkan fungsi aljabar, kesalahan dalam melakukan operasi pembagian, keliru menentukan kriteria konvergensi karena hanya membuktikan dengan satu kemungkinan dari fungsi yang diberikan sehingga mahasiswa hanya fokus pada kriteria konvergensi tanpa melakukan analisis iterasi.

How to cite:

Nurfauziah, P., & Anita, I. W. (2023). Studi kasus: Analisis kriteria konvergensi iterasi sederhana berdasarkan tebakan awal. *JPMM – Jurnal Pembelajaran Matematika Inovatif*, 6 (6), 2131-2138.

PENDAHULUAN

Metode Numerik merupakan salah satu mata kuliah yang umumnya dipelajari pada Program studi teknik, matematika, pendidikan matematika, komputer dan lainnya. Pada program studi tersebut dibutuhkan pemahaman dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan yang besar, suatu persamaan yang tidak linier dan persamaan kompleks yang tidak mungkin diselesaikan secara analitis, hanya dapat diselesaikan dengan metode numerik (Atmika, 2016). Selain hal tersebut, metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmetika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi (Munir, 2015).

Pada Program studi Pendidikan Matematika di IKIP Siliwangi, Metode Numerik menjadi salah satu mata kuliah khusus program studi. Tujuannya adalah agar mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan non linear yang tidak dapat dikerjakan secara analitik. Salah satu pokok bahasan di dalam metode numerik adalah metode iterasi sederhana/lelaran titik tetap. Metode tersebut termasuk ke dalam metode terbuka yang dilakukan untuk mencari akar $f(x) = 0$ (Munir, 2015). Oleh karena hal tersebut, mahasiswa wajib mengontrak mata kuliah metode numerik yang dipandang dapat membantu mahasiswa di dalam memecahkan permasalahan matematika.

Berdasarkan hal tersebut, diperlukan kemampuan pemahaman mahasiswa di dalam memecahkan masalah iterasi sederhana. Pada pokok bahasan iterasi sederhana, mahasiswa harus menyusun beberapa prosedur penyelesaian dengan menyusun $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$ yang kemudian akan dirubah menjadi prosedur lelaran $x_{r+1} = g(x_r)$, setelah itu mahasiswa harus menerka tebakan awal/nilai awal x_0 dan menghitung nilai x_1, x_2, \dots dimana tebakan itu dihipkan akan konvergen ke akar sejati s sehingga $f(s) = 0$, $s = g(s)$ dan lelaran akan berhenti pada kondisi $|x_{r+1} - x_r| < \epsilon$.

Kemampuan pemahaman mahasiswa di dalam fungsi aljabar dan turunan menjadi prasyarat di dalam menyelesaikan permasalahan iterasi sederhana. Akan tetapi, pada umumnya mahasiswa kesulitan dalam menentukan metode penurunan fungsi aljabar yang tepat, khususnya pada aturan dalil rantai (Hasanah, 2019). Selain itu, (Rahmawati & Roesdiana, 2022) mengemukakan bahwa peserta didik masih banyak yang belum memahami konsep turunan fungsi aljabar. Selain pemahaman terkait turunan fungsi aljabar, mahasiswa perlu memahami aturan-aturan yang harus dilakukan di dalam menyelesaikan masalah dengan menggunakan metode iterasi sederhana.

Oleh karena hal tersebut, di dalam penelitian ini mahasiswa akan diberikan satu soal *open ended* yang berkaitan dengan iterasi sederhana. Soal *open ended* merupakan permasalahan yang diformulasikan mempunyai banyak jawaban yang benar, Shimada (Ruslan & Santoso, 2013). Selain itu, Hasyim & Andreina (2019) mengemukakan bahwa *Open Ended Problems* artinya pembelajaran yang menyajikan permasalahan dengan pemecahan berbagai cara (*flexibility*) dan solusinya juga bisa beragam (multi jawab, *fluency*). Dengan pemberian soal *open ended* pada materi iterasi sederhana, kita dapat melihat bagaimana cara mahasiswa menyusun bentuk $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$, menurunkan fungsi aljabar, memilih tebakan awal, dan menentukan kriteria konvergensi. Sehingga penelitian ini bertujuan untuk menganalisis jawaban mahasiswa pada permasalahan *open ended* analisis kriteria konvergensi iterasi sederhana berdasarkan tebakan awal.

METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah penelitian kualitatif yang berfokus pada studi kasus tunggal (*single case study*). Studi kasus tunggal merupakan desain kasus tunggal dipergunakan apabila mengkaji suatu kasus unik atau beberapa sub-unit analisis seperti studi kasus yang berkenaan dengan program publik tunggal (Wahyuningsih, 2013). Subjek dari penelitian ini adalah 25 mahasiswa 2020 A2 yang mengampu mata kuliah Metode Numerik. Instrumen yang digunakan dalam penelitian ini adalah soal tes mata kuliah metode numerik. Teknik analisis data yang dilakukan adalah dengan menganalisis jawaban mahasiswa serta melakukan pencocokan jawaban dari jawaban yang tepat yang berdasarkan pada kriteria konvergensi.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

Pada penelitian ini, mahasiswa diberikan satu soal *open ended* terkait iterasi sederhana, yang mengharuskan mahasiswa mencari tebakan awal dan membuktikan kriteria konvergensi divergen monoton.

Buktikan bahwa akar dari persamaan dari $f(x) = x^2 - 7x + 12$, dengan $\varepsilon = 6.05 \times 10^{-5}$ memiliki kriteria divergen monoton!

Gambar 1. Soal *Open Ended* Iterasi Sederhana

Soal di atas, mengarahkan mahasiswa untuk memilih berbagai tebakan awal membuktikan bahwa persamaan dari fungsi $f(x) = x^2 - 7x + 12$ memiliki kriteria konvergensi divergen monoton. Alternatif kemungkinan dari $f(x) = 0$ menjadi bentuk $x = g(x)$ adalah sebagai berikut:

Kemungkinan 1:

$$\begin{aligned}x^2 - 7x + 12 &= 0 \\x^2 &= 7x - 12 \\x &= \sqrt{7x - 12} \\g(x) &= \sqrt{7x - 12}\end{aligned}$$

Prosedur lelarannya:

$$x_{r+1} = \sqrt{7x_r - 12}$$

Kemungkinan 2:

$$\begin{aligned}x^2 - 7x + 12 &= 0 \\x(x - 7) &= -12 \\x &= \frac{-12}{(x-7)} \\g(x) &= \frac{-12}{(x-7)}\end{aligned}$$

Prosedur lelarannya:

$$x_{r+1} = \frac{-12}{(x_r - 7)}$$

Kemungkinan 3:

$$\begin{aligned}x^2 - 7x + 12 &= 0 \\x &= \frac{12+x^2}{7} \\g(x) &= \frac{12+x^2}{7}\end{aligned}$$

Prosedur lelarannya:

$$x_{r+1} = \frac{12+x_r^2}{7}$$

Untuk membuktikan ketiga kemungkinan tersebut divergen monoton, maka prosedur selanjutnya adalah dengan menurunkan $g(x)$ menjadi $g'(x)$. Dimana tebakan awal $= x_0$ yang akan kita analisis bersama, sesuai dengan pilihan x_0 yang dipilih mahasiswa. Berikut kriteria konvergensi menurut Munir (2015) dapat di lihat sebagai berikut:

Tabel 1. Kriteria Konvergensi

Interval	Kriteria
$0 < g'(x) < 1$	Lelaran Konvergen Monoton
$-1 < g'(x) < 0$	Lelaran Konvergen Berosilasi
$g'(x) > 1$	Lelaran Divergen Monoton
$g'(x) < -1$	Lelaran Divergen berosilasi

Terdapat beberapa temuan untuk dianalisis lebih lanjut kembali terkait hasil dari jawaban mahasiswa dalam menyelesaikan soal iterasi sederhana.

Tabel 2. Hasil Analisis Jawaban

Analisis Jawaban	Jumlah
Keliru dalam Turunan	7
Hanya Membuktikan konvergen	6
Keliru memilih kriteria konvergensi	4
Kesalahan di dalam Operasi Pembagian	3
Membuktikan Divergen	3
Membuktikan 2 Percobaan Konvergen	2

Berdasarkan tabel di atas, nampak bahwa kesalahan paling besar mahasiswa adalah keliru dalam menurunkan fungsi. Sehingga dapat dikatakan untuk proses selanjutnya dalam menyelesaikan iterasi sederhana juga akan keliru. Nampak pada jawaban yang dituliskan oleh mahasiswa, mahasiswa tidak menggunakan aturan dalam menurunkan fungsi aljabar. Mahasiswa langsung menuliskan jawaban yang dipandang tepat, sehingga mahasiswa keliru dalam menjawab pembuktian kriteria konvergensi.

The image shows three pieces of handwritten student work. The top piece shows the derivation of $g(x) = \frac{x^2 + 12}{7}$ from $f(x) = x^2 - 7x + 12 = 0$, with a boxed derivative $g'(x) = \frac{2x + 12}{7}$. The student then incorrectly concludes divergence because $g'(x) > 1$. The middle piece shows a similar derivation for $g(x) = \frac{-12}{x-7}$ with a boxed derivative $g'(x) = 2.4$ and a conclusion of divergence. The bottom piece shows a derivation for $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{7x-12}}$ with a boxed derivative $g'(4) = 1$ and a conclusion of divergence.

Gambar 2. Jawaban Mahasiswa yang Keliru di dalam Menurunkan Fungsi Aljabar dan Keliru dalam Melakukan Operasi Pembagian

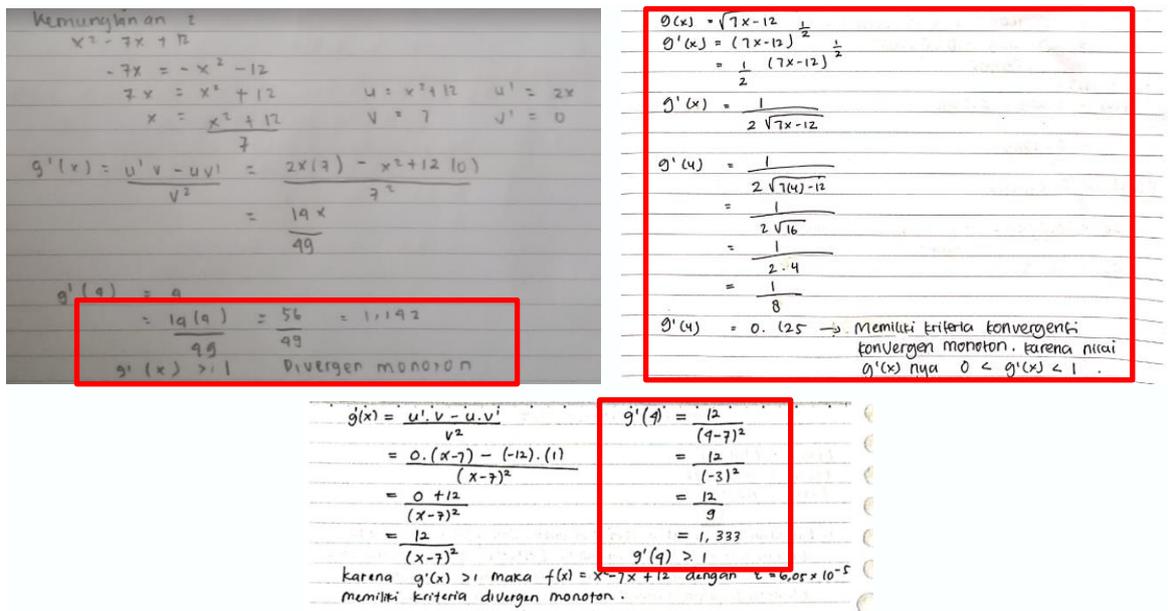
Untuk membuktikan kriteria konvergensi, harus melihat terlebih dahulu tabel kriteria konvergensi yang terdapat pada tabel 1. Sebelum menentukan kriteria konvergensi, persamaan

$g(x)$ diturunkan terlebih dahulu menjadi $g'(x)$. Selanjutnya tebakan awal di substitusi ke persamaan $g'(x)$. Fokus utama dari soal yang diberikan adalah membuktikan bahwa jawaban soal tersebut harus memiliki kriteria konvergensi divergen monoton. Akan tetapi berdasarkan analisis jawaban mahasiswa, pada umumnya mahasiswa hanya membuktikan dari satu kemungkinan $g'(x)$. Sehingga banyak mahasiswa hanya membuktikan konvergensi secara umum dan keliru menentukan kriteria konvergensi yang didapat dari persamaan $g'(x)$. Berikut hasil analisis pembuktian divergen monoton yang dibandingkan dengan jawaban mahasiswa.

Tabel 3. Hasil Analisis Pembuktian Divergen Monoton

Tebakan Awal	Pembuktian Divergen Monoton ($g'(x) > 1$)		
	1	12	$\frac{2x}{7}$
	$\frac{1}{2\sqrt{7x-12}}$	$\frac{12}{(x-7)^2}$	
2	0.353553391	0.4800	0.5714
3	0.166666667	0.7500	0.8571
4	0.125	1.3333	1.1429
5	0.104257207	3.0000	1.4286
6	0.091287093	12.0000	1.7143

Berdasarkan tabel 3 nampak bahwa dua kemungkinan dengan tebakan awal mulai dari 4 memiliki kriteria konvergensi divergen monoton dan untuk kemungkinan satu memiliki kriteria konvergen monoton. Nampak beberapa jawaban mahasiswa pada gambar di bawah ini.



Gambar 3. Jawaban Mahasiswa dalam Membuktikan Kriteria Konvergensi

Nampak pada gambar di atas, terdapat beberapa jawaban mahasiswa yang memiliki nilai yang sesuai dengan tabel 3 tentang analisis kriteria konvergensi. Terlihat pula pada gambar jawaban, bahwa mahasiswa memilih tebakan awal 4.

Pembahasan

Berdasarkan hasil analisis jawaban mahasiswa di dalam membuktikan kriteria konvergensi iterasi sederhana berdasarkan tebakan awal, ditemukan temuan yang dipandang menjadi salah satu penyebab tidak terbuktinya kriteria konvergensi divergen monoton adalah keliru di dalam menurunkan fungsi aljabar. Penguasaan konsep turunan menjadi salah satu prasyarat di dalam

mata kuliah metode numerik, karena pada pokok bahasan iterasi sederhana, mahasiswa harus menurunkan persamaan $g(x)$ menjadi $g'(x)$. Akan tetapi pada kenyataannya mahasiswa kurang memahami bagaimana cara menurunkan fungsi aljabar, khususnya pada fungsi yang berbentuk akar kuadrat dan pecahan. Berdasarkan hal tersebut, dapat dikatakan bahwa mahasiswa tidak terlalu memahami konsep turunan fungsi aljabar. Lepertery et al., (2022); Fransiska et al., (2022) mengemukakan bahwa kemampuan matematika siswa pada materi turunan masih rendah. Selain hal tersebut, nampak juga bahwa mahasiswa keliru dalam menyelesaikan operasi pembagian. Berdasarkan jawaban mahasiswa pada gambar 2, mahasiswa keliru di dalam menyelesaikan operasi pembagian. Siswa-siswa cenderung melakukan kesalahan proses dalam turunan, operasi hitung serta melakukan substitusi (Prihandika et al., 2023). Selain hal yang di atas, yang menyebabkan mahasiswa keliru dalam menentukan kriteria konvergensi divergen monoton adalah mahasiswa hanya membuktikan satu kemungkinan saja, dan pada umumnya mahasiswa membuktikan pada kemungkinan 1 yang nampak pada tabel 2 bahwa kemungkinan 1 memiliki kriteria konvergensi konvergen monoton.

Dalam membuktikan kriteria konvergensi terdapat beberapa tahapan terstruktur yang harus dijalankan. Selain menurunkan fungsi aljabar, diperlukan tebakan awal yang akan menentukan kriteria konvergensi yang didapat. Pada soal *open ended* yang diberikan, fungsi tersebut dapat dibuat menjadi tiga kemungkinan awal yang dapat dipilih untuk menentukan kriteria konvergensi divergen monoton. Pada tabel 3 hasil analisis kriteria konvergensi divergen monoton nampak bahwa kemungkinan 1 dengan $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{7x-12}}$ didapatkan rangkaian nilai $0 < g'(x) < 1$ dari tebakan awal 2 sampai 6, sehingga untuk kemungkinan 1 memiliki kriteria konvergensi konvergen monoton. Untuk kemungkinan 2 dengan $g'(x) = \frac{12}{(x-7)^2}$ dari tebakan awal 2 dan 3 nampak bahwa nilai $0 < g'(x) < 1$, sehingga memiliki kriteria konvergen monoton. Akan tetapi ketika tebakan awal ≥ 4 didapatkan nilai $g'(x) > 1$, sehingga dari tebakan awal ≥ 4 untuk kemungkinan 2 memiliki kriteria konvergensi divergen monoton. Terakhir adalah kemungkinan 3 dengan $g'(x) = \frac{2x}{7}$. Sama halnya dengan kemungkinan 2, bahwa pada kemungkinan 3 untuk tebakan awal 2 dan 3 memiliki kriteria konvergensi konvergen monoton, dan tebakan awal ≥ 4 memiliki nilai $g'(x) > 1$ yang berarti memiliki kriteria divergen monoton.

Berdasarkan hasil analisis jawaban mahasiswa didapatkan 5 mahasiswa yang tepat di dalam membuktikan kriteria konvergensi divergen monoton pada iterasi sederhana berdasarkan tebakan awal. Yaitu pada mahasiswa yang menjawab membuktikan divergen monoton dan yang menjawab dengan membuktikan 2 percobaan konvergen (lihat tabel 1). Ketepatan mahasiswa dalam membuktikan kriteria konvergensi nampak pada gambar 3. mahasiswa dapat membuktikan kriteria konvergensi divergen monoton dan konvergen monoton dengan tebakan awal acak 4. Sehingga dapat dikatakan bahwa kemungkinan yang diambil dan tebakan awal akan mempengaruhi kriteria konvergensi yang di dapat dari pembuktian iterasi sederhana.

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis jawaban mahasiswa di dalam membuktikkan kriteria konvergensi iterasi sederhana berdasarkan tebakan awal, didapatkan 5 mahasiswa yang tepat did alam membuktikan kriteria konvergensi divergen monoton. Kriteria konvergensi didapatkan berdasarkan kemungkinan-kemungkinan $g'(x)$ yang dipilih dan berdasarkan tebakan awal yang dipilih. Sehingga di dalam membuktikan kriteria konvergensi yang diinginkan/yang akan

dibuktikan, idealnya tidak hanya satu kemungkinan yang akan diambil untuk dibuktikan. Selain hal itu, yang menyebabkan mahasiswa keliru di dalam membuktikan kriteria konvergensi adalah keliru dalam menurunkan fungsi aljabar, keliru dalam melakukan operasi pembagian, dan hanya membuktikan satu kemungkinan $g'(x)$ untuk mencari kriteria konvergensi.

UCAPAN TERIMA KASIH

Terimakasih kepada IKIP Siliwangi dan Yayasan Kartika Jaya yang telah mendanai Hibah Penelitian Internal dengan Skema Penelitian Dasar, sehingga artikel ini dapat diterbitkan dengan pendanaan Hibah Internal.

DAFTAR PUSTAKA

- Atmika, I. K. A. (2016). Diktat mata kuliah metode numerik. In *Universitas Udayana*. Jurusan Teknik Mesin - Fakultas Teknik - Universitas Udayana.
- Fransiska, R., Anwar, A., & Syahjuzar, S. (2022). Kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar di sma plus al-'athiyah tahfidz al-qur'an banda aceh. *Jurnal Ilmiah Mahasiswa Pendidikan Matematika*, 7(2), 140–151. <http://www.jim.unsyiah.ac.id/pendidikan-matematika/article/view/20681%0Ahttp://www.jim.unsyiah.ac.id/pendidikan-matematika/article/download/20681/10061>
- Hasanah, H. (2019). Analisis kesulitan mahasiswa dalam menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar. *Jurnal InTent*, 2(1), 76–84.
- Hasyim, M., & Andreina, F. K. (2019). Analisis high order thinking skill (HOTS) siswa dalam menyelesaikan soal open ended matematika. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika Dan Matematika*, 5(1), 55. <https://doi.org/10.24853/fbc.5.1.55-64>
- Lepertery, M. E., Ayal, C. S., & Palinussa, A. L. (2022). Analisis kesulitan siswa dalam menyelesaikan soal turunan fungsi aljabar ditinjau dari kecerdasan emosional. *Jurnal Pendidikan Matematika Unpati*, 3(2), 50–57. <https://doi.org/10.31537/laplace.v5i2.761>
- Munir, R. (2015). *Metode numerik, Revisi Empat*. Informatika.
- Prihandika, Y. A., Hidayah, I., Susilo, B. E., & Dewi, N. R. (2023). Analisis kesalahan siswa dalam menyelesaikan soal matematika materi limit fungsi aljabar. *Prosiding Seminar Nasional Pascasarjana Universitas Negeri Semarang*, 961–966. <https://journal.ikipsiliwangi.ac.id/index.php/jpmi/article/viewFile/3849/1793>
- Rahmawati, N. D., & Roesdiana, L. (2022). Analisis kemampuan pemahaman konsep matematis siswa SMA pada materi turunan fungsi aljabar. *Jurnal Edukasi Dan Sains Matematika (JES-MAT)*, 8(1), 17–32. <https://doi.org/10.25134/jes-mat.v8i1.5579>
- Ruslan, A. ., & Santoso, B. (2013). Pengaruh pemberian soal open-ended terhadap kemampuan penalaran matematis siswa. *Kreano*, 4(2), 138–150.
- Wahyuningsih, S. (2013). *Metode penelitian studi kasus*. UTM Press.

